数理解析研究所講究録
320巻 1978年 119-134

C^*-algebraのregular σ-completionとAW*-factor of Type III

東北大 理　斎藤知之

W*-algebraの代数的抽象化として始まったAW*-algebraの研究［　］は，1970年 O. Takenouchi, Dyerによるnon W*, AW*-factorsの構成，さらに1976年 J. D. Maitland WrightによるSimple, separable infinite dimensional unital C^*-algebraのregular σ-completionとしてのnon W*, AW*-factor of Type IIIの構成へと発展した。従って今後の課題は，"non W*, AW*-factorを自然な方法で構成しその代数型の決定及び分類をすること"であろう。　この講演では，上の観点から，Wrightによる"regular σ-completion" O. Takenouchiによる接合積，あるいはDyerによる構成及び筆者の最近の結果等をあわせて報告することにする。詳しい文献は末尾を参照されたい。

§1では後に必要なAW*-factorのtypeの判定定理を述べ［6］§2でJ. D. M. Wrightに従って C^*-algebraのregular σ-completionによるAW*-factorの構成を紹介し §3では，Takenouchi, Dyerに

よる構成を紹介し §1の判定定理によってそれらが type III, monotone closed な tW^*-factors であること 及びそれらの相互関係（Dyer の構成法と O. Takenouchi による接合積）を調べた筆者の結果を述べる。

§1 tW^*-algebra からの準備（type の判定定理）.

1. M を monotone σ-complete tW^*-algebra とする。i.e. M の hermitian part M_h の bounded above な increasing sequence $\{x_n\}$ は，M_h の中で supremum x をもつ（$x_n \uparrow x$ or $x = \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$）。

<u>Lemma</u> M が monotone σ-complete tW^*-algebra とする。$\{f_n\} \subset M_p$（M の projections 全体）を increasing sequence of projections in M とする。$\operatorname{Sup}_n f_n$ を M_p に於ける $\{f_n\}$ の supremum とし，$\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n$ を M_h のそれとすると，$\bigvee_{n=1}^{\infty} f_n = \operatorname{Sup}_n f_n$ & $a^* f_n a \uparrow a^*(\operatorname{Sup}_n f_n) a$ (order) for $\forall a \in M$ である。

proof. $b = \bigvee_{n=1}^{\infty} f_n$ は $0 \leq b \leq 1$ より $0 \leq f_n \leq b \leq \operatorname{Sup}_n f_n$ $\forall n$ に注意して，$f_n \leq Lp(b) \leq \operatorname{Sup}_n f_n$ ($\forall n$) 故に $Lp(b) = \operatorname{Sup}_n f_n$. 一方 $f_n b = f_n$ $\forall n$ より $Lp(b) = b\,Lp(b) = b$ i.e. $\operatorname{Sup}_n f_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} f_n$. 従って，Kadison-Pedersen [2] の議論によって，$\forall a \in M$ に対し，$a^* f_n a \uparrow a^*(\operatorname{Sup}_n f_n) a$ (in M_h) が成立する。//

<u>Theorem</u> ([6]). M を monotone σ-complete tW^*-factor とし，φ を M 上の faithful state（存在を仮定！）とする。もし M

が semi-finite ならば、それは W^*- factor 従って、M が non W^* ならば、M は type III である。

proof. M が semi-finite とすると、$\exists e \in M_p$ non-zero finite projection である。今それを1つ固定する。$N = eMe$ は finite AW^* factor で $\psi(exe) = \phi(exe)/\phi(e)$ は N 上の faithful state である。

故に [12] によれば、N は W^*-algebra i.e. $\exists (\pi_e, \mathfrak{H}_e)$: faithful W^*-representation of N on $\mathfrak{H}_e$ i.e. $\pi_e(N) \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H}_e)$ weakly closed $*$-subalgebra with unit $1_{\mathfrak{H}_e}$ である。今 $\{e_n\}$ を M_p の any decreasing sequence : $e_n \downarrow 0$ とすれば、Lemma より $ee_ne \downarrow 0$ in N_h. より $\pi_e(ee_ne) \downarrow 0$ strongly in $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_e)$ である。$\Phi_e(x) = exe$ $\forall x \in M$ として、$\xi \in \mathfrak{H}_e$ $(\|\xi\| = 1)$ として、$\omega_\xi \circ \pi_e \circ \Phi_e$ は M 上の c. a. state となる。(M は σ-finite である!) 又 $\{\omega_\xi \circ \pi_e \circ \Phi_e$, e: finite $\neq 0$ projection in M $\}$ は、M 上の separating family of c. a. states である。よって [5] によれば、M は faithful W^*- representation をもちよって、M は W^* factor である。//

注意. 同様の結果が J. D. M. Wright によって得られている([13])。

§2 C^*-algebra の regular σ-completion の一般論と III 型, non W^*, AW^* factor. 以下 J. D. M. Wright [9, 10, 11, 12] に従ってその内容を紹介する。以下特にことわらぬ限り C^*-algebra は <u>unital</u> とする。unital でない場合は次の機会に報告する [7]。

1. C*-algebrasの Baire *-envelope について． A : unital C*-algebra acting on the <u>universal</u> Hilbert space H, A'' は A の $\mathcal{B}(H)$ に於ける weak closure（A の second dual A^{**} と *-isomorphic）とする。

<u>Definition</u>. M monotone σ-complete AW^*-algebra とし M_h をその hermitian part とする。$M_h \supset E$ が <u>σ-subspace</u> であるとは，$\forall \{a_n\} \subset E$: bounded monotone increasing sequence に対して，$\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n \in E$ となることである。

$(A_0^\infty)_h$ を A_h を含む $\mathcal{B}(H)_h$ の最小の σ-subspace とすれば

<u>Proposition</u>（Pedersen ~~———~~）$A_0^\infty \equiv (A_0^\infty)_h + i(A_0^\infty)_h$ は A'' の C*-subalgebra である。

<u>Definition</u> A_0^∞ を A の Baire *-envelope と呼ぶことにする。A_0^∞ は monotone σ-complete C*-algebra である。（可換の場合の Baire function に相当）

2. null ideal. A_0^∞ に於ける pointwise supremum と algebraic supremum の差をなしくずしにする為に次のような null ideal を導入する（可換の場合 "meager" support の Baire function のつくる ideal に相当）。X を A の ~~pure~~ states 全体のつくる space で $\sigma(A^*, A)$-topology を入れる。$\partial X \subset X$（pure states 全体）はこの topology で <u>Baire space</u> となることに注意しよう。$M^+(A) = \{m ; m \geq 0, m \in A'' : \{x ; x \in \partial X, m(x) > 0\}$ は ∂X の meager subset$\}$ は A''^+ の positive cone，$N(A)$ を A'' の中での complex linear span of $M^+(A)$

とすると $N(A)$ は A'' の σ-ideal (σ-closed な ideal) である。

$\mathfrak{g}(A) \equiv A_0^\infty \cap N(A)$ とすると $\mathfrak{g}(A)$ は次の性質をもっている。

$\mathfrak{z}$ を $A_0^\infty \longrightarrow A_0^\infty/\mathfrak{g}(A)$ の natural quotient map とする($\mathfrak{g}(A)$ は A_0^∞ の σ-ideal) とき、

Proposition. $f, g \in A_0^\infty$ に対して、

$$f \leqq g \ a.e. \quad \rightleftarrows \quad \mathfrak{z}(f) \leqq \mathfrak{z}(g)$$

但し $f \leqq g$ a.e. $\overset{\text{def.}}{\rightleftarrows}$ $\{x ;\ x \in \partial X ;\ \ f(x) > g(x)\}$ meager 。

Lemma. (E. Christensen ~~[ ]~~). C を monotone σ-complete C^*-algebra with identity J を proper σ-ideal of C とし, $\mathfrak{z}'$ を $C \longrightarrow C/J$ の canonical map とすれば, C/J は monotone σ-complete 且つ $\mathfrak{z}'$ は σ-homomorphism となる。

このことから、

Proposition $A_0^\infty/\mathfrak{g}(A)$ は, monotone σ-complete C^*-algebra with identity で, quotient map は, σ-homomorphism である。さらに ∂X が Baire-space であることに注意して,

$A \cap \mathfrak{g}(A) = \{0\}$ i.e. $\mathfrak{z}|A$ は, A into $A_0^\infty/\mathfrak{g}(A)$ の $*$-monomorphism : $\mathfrak{z}(1) = 1$ である。

3. unital C^*-algebra の regular σ-completion.

Definition A を unital C^*-algebra とする。$(\mathcal{C}, k)$ が A の regular σ-completion であるとは, $\mathcal{C}$ が monotone σ-complete C^*-algebra で, $k : A \longrightarrow \mathcal{C}$ $*$-monomorphism : $k(1) = 1$ 4

(i) $\{a_n\} \subset A_h$ $a_n \downarrow$ with $\bigwedge_A a_n = 0 \Rightarrow \bigwedge_C k(a_n) = 0$

(ii) C は $k(A)$ により σ-generate されている。i.e. C_h が $k(A_h)$ を含む最小の σ-subspace.

(iii) C_h の元 x は、$x = \mathrm{lub}_C\{k(a)\,;\ a \in A_h\ \ k(a) \leqq x\}$ $= \mathrm{glb}_C\{k(b)\,;\ b \in A_h : k(b) \geqq x\}$

<u>Theorem</u> (J. D. M. Wright) $(A_0^\infty/g(A), g)$ は、A の regular-σ-completion である。

proof. まず $(A_0^\infty/g(A), g)$ が A の monotone σ-completion であることを示す。その為には、$g(A_h)$ を含む最小の σ-subspace of $(A_0^\infty/g(A))_h$ が $(A_0^\infty/g(A))_h$ であることを示せばよい。$g(A_h)$ を含む $(A_0^\infty/g(A))_h$ の最小の σ-subspace を W とおこう。$V \equiv \{a \in A_0^\infty{}_h \quad g(a) \in W\}$ は A_0^∞ の σ-subspace で、$A_h \subset V$ 故に $(A_0^\infty)_h \subset V$ 故に $W = (A_0^\infty/g(A))_h$ となる。

次に regularity を示そう。$f \in (A_0^\infty)_h$ に対して、$\{g(a)\,;\ a \in A_h,\ g(a) \leqq g(f)\} \equiv \mathfrak{S}_{g(f)}$ を考える。$g(g)$ を $\mathfrak{S}_{g(f)}$ の upper bound ($g = g^*\ \ g \in (A_0^\infty)_h$) i.e. $g(a) \leqq g(f)\ \ a \in A_h \Rightarrow g(a) \leqq g(g)$ とする。$f, g \in (A_0^\infty)_h$ より $f|X$, $g|X$ は、X 上の bounded Baire functions であるから一般論から (Choquet-Bishop-deLeeuw の理論) $\exists\, u, w$: bounded upper semi-continuous concave functions : $f = u$ a.e. $g = w$ a.e. とできる。

従って、$g(a) \in \mathfrak{S}_{g(f)}$ なら $a \leqq w$ i.e. $a \leqq u \Rightarrow a \leqq w$ が成立する。

$\check{u}(x) = \mathrm{Sup}\{a(x) \quad a \leqq u,\ a \in A_h\}\ \forall x \in X$ と置けば $\check{u} \leqq w$
が成立。又一般論により $u = \check{u}$ a.e. 故に $u \leqq w$ a.e. である
(convex sets の separation による)
故に $f \leqq g$ a.e. よって Proposition から $g(f) \leqq g(g)$ 故に
$g(f) = \mathrm{lub}\{g(a);\ g(a) \leqq g(f)\quad a \in A_h\}$。i.e. $(A_0^\infty/g(A),\ g)$
は，A の regular σ-completion である。//

注意．実は，A の regular σ-completion は，次の意味で <u>unique</u>
(C_1, α_1)，(C_2, α_2) を A の regular σ-comptetions とすると，
$\exists \beta : C_1 \to C_2$ *-isomorphism : $\beta\alpha_1 = \alpha_2$ i.e.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & C_1 \arrow[d, "\beta^{\exists}\ *\text{-isomorphism}"] \\ & C_2 \end{tikzcd}$$

今後 $A_0^\infty/g(A) \equiv \hat{A}$ と書くことにする。$g|A = i$ 省略する。
注意すべきことは，A が simple なら $\hat{A}$ も simple である。実際
$J \subset \hat{A}$ proper closed two-sided ideal とすれば，$J \cap A$ も A
で proper closed two-sided ideal である。

proof. $1 \notin J \cap A$ もし $J \cap A = \{0\}$ とすれば，$h : \hat{A} \longrightarrow \hat{A}/J$ は
quotient homomorphism で，$h_0 = h|A$ は into *-isomorphism : $h_0(1) = 1$
h_0 は isometric bipositive, isomorphism より，$b \in J_h$ $a \in A_h$
$a \leqq b$ とすると，$h_0(a) \leqq h(b) = 0$ ∴ $h_0(a) \leqq 0$ ∴ $a \leqq 0$
$b = \mathrm{lub}\{a;\ a \in A_h\quad a \leqq b\}$ より $b \leqq 0$ 同様にして，$-b \in J$
故に $-b \leqq 0$ ∴ $b = 0$ 故に $J = \{0\}$ で矛盾である。

4. infinite dimensional simple separable unital C^*-algebra の regular σ-completion について。A は標記の仮定を満すものとし、$\hat{A}$ を A の regular σ-completion とすれば $\hat{A}$ は countable order dense subset をもつ。i.e. $\exists A_0 \subset \hat{A}_h$ (実は、A_h の中に!) (countable): $x = \mathrm{lub}\{a \in A_0 ; a \leqq x\}$ $y = \mathrm{glb}\{b \in A_0 ; b \geqq x\}$。

proof. A_0 を A_h の countable norm dense subset A_0 は $1 \in A_0$及び finite rational linear combinations に関して closed であるとして一般性を失なわぬ。$\forall a \in A_h$ において $\forall n$ (natural) に対して、$\exists a_n \in A_0$: $\|a - \frac{1}{2}(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}) - a_n\| < \frac{1}{2^{n+2}}$ i.e. $a - \frac{1}{2^n} < a_n < a - \frac{1}{2^{n+1}}$ $\therefore a_n + \frac{1}{2^{n+1}} < a$ により上記のことが示される。

従って、$\hat{A}$ は countable chain condition をもつから σ-finite である。従って、$\hat{A}$ は σ-finite, monotone complete AW^*-factor である。次の proposition によって、$\hat{A}$ の pure states の the space は $\sigma(\hat{A}^*, \hat{A})$-topology で separable である。

Proposition C を C^*-algebra with a countable order dense subset $\{d_n\}$ $(d_n = d_n^*)$ をもつとする。∂S (S : C の the state space, ∂S は pure states 全体) は S の relative topology で separable である。

proof. $U_n = \{s \in \partial S ; s(d_n) > 0\}$ は開且つ $\exists n : U_n \neq \phi$. O any non-empty open subset of ∂S, $e \in O$ とすれば、$\exists b \in C_h$:

$e \in \{s ; s \in \partial S ; s(b) > 0\} \subset O$ であった。$N_0 \equiv \{n \in N ; d_n \leqq b\}$

$b = lub\{d_n ; n \in N_0\}$ より、$e(b) > 0$ により もし $d_n \leqq 0 \ \forall n \in N_0$

なら $l.u.b\{d_n , n \in N_0\} = b \leqq 0 \ \therefore e(b) \leqq 0$ で矛盾 $\therefore \exists k \in N_0 :$

$U_k \neq \phi \ \therefore \ \phi \neq U_k = \{ s \in \partial S ; s(d_k) > 0 \} \subset \{s \in \partial S, s(b) > 0\}$

$\subset O$ となる。$\{U_k\}_{k \in N}$ の中から1点ずつとりだせば $(\neq \phi)$

∂S の countable $\sigma(\mathcal{C}^*, C)$-dense subset を得る。//

特に C は faithful state をもつ。

以上から $\hat{A}$ は faithful state をもち、しかも $\partial X_{\hat{A}}$ は separable

従って、$\hat{A}$ が W^*-factor ならば minimal projection をもつことに

なり $\hat{A}$ は type 1 , not finite dimensional より、not simple となり矛盾

よって、$\hat{A}$ は faithful state をもつから最初の判定定理より

$\hat{A}$ は type III である。i.e. $\hat{A}$ は non W^*, monotone closed AW^* factor

of type III である。A としては Glimm の UHF-algebra とか two-generator

の free group からつくられる group C^*-algebra とすればよい。

以上が J. D. M. Wright の構成のあらましである。詳しくは

[9, 10, 11, 12] を参照。

§3 Cross product construction 並びに Dyer's construction による

III型の AW^*-factor の構成.

以下 O. Takenouchi [8] に従って、cross product construction

の概略を述べる。Z を abelian AW^*-algebra , G を Z の $*$-

automorphisms のつくる a group，$a \to a^g$ を G の action とする。I. Kaplansky〔3〕に従って，AW*-module $\mathfrak{M}$ をつくる。$\mathfrak{M} = \{ x = (x_g) ;\ x_g \in Z \ \forall g \ \ \sum x_g^* x_g \in Z$ （Z で order 収束）$\}$ とすれば $\mathfrak{M}$ は canonical な内積により Z 上の faithful AW*-module であり $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ は $\mathfrak{M}$ 上の bounded module endomorphisms 全体のつくる type I AW*-algebra with center Z（monotone closed）とする。$\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ の元は次のように行列表現できる。$\mathfrak{M}$ の "c n o s" $\{u_g\}$ ($u_{g_0} = (\delta_{g,g_0}1)$) に対して，$(Au_h, u_g) = a_{g,h} \ \forall g, h$ とする。

$\mathbb{M}(Z, G) \equiv \{ A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M}) ;\ a_{g,h} = a_{gh^{-1},e} \ \ \forall g, h \in G \}$ とすると，$\mathbb{M}(Z, G)$ は "weakly closed" である。従って，$\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ の自然な AW*-algebra の構造を $\mathbb{M}(Z, G)$ に制限して，$\mathbb{M}(Z, G)$ は monotone closed AW*-algebra である。（$\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ の AW*-subalgebra）

G の Z 上の action に関して，

(F) $p \in Z_p$: absolutely fixed なら $p = 0$ i.e. $\forall q \in Z_p$ $q \leqq p$ に対して，$q^g = q \ \forall g \in G \Rightarrow p = 0$，

(E) $a^g = a \ \ \forall g \in G \ \ a \in Z \Rightarrow a = \lambda 1$ λ スカラー

という仮定のもとに $\mathbb{M}$ は $\{ L_a,\ a \in Z \} = \widetilde{Z}$ を maximal abelian *-subalgebra とする factor である。但し $L_a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ は，$L_a : (x_g) \longrightarrow (a^g x_g)$ $(x_g) \in \mathfrak{M}$ $a \in Z$ によって定義される $\mathfrak{M}$ の bounded module endomorphism である。

(Z, G) の例として $Z = B^\infty[0, 1)/\sim$（$[0, 1)$ 上の bounded

Baire functions のつくる C^*-algebra を meager set を support にもつ functions の σ-ideal で割った AW^*-algebra.) $G = G_\theta$ 但し G_θ は $\{m + n\theta ; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ (θ given irrational) により $[0, 1)$ 上の translations (mod 1) の homeomorphisms group を与え これを Z 上に自然にあげた $*$-automorphism group とする。

<u>Theorem</u> ([8]) $M(Z, G_\theta)$ は non W^*, AW^*-factor である。

proof. もし $M(Z, G_\theta)$ が W^* ならば、$\tilde{Z}$ 従って、Z が W^* となり矛盾する。

以上が [8] の概略である。次に Dyer の example について説明する。$\mathfrak{A} = B^\infty[0, 1)$、$\mathfrak{g}$ は zero でないところが meager set になっている $\mathfrak{A}$ の元のつくる the ideal とする。$0 \leq x < 1$ に対して、H: non-separable Hilbert space with cnos $\{e_x \quad 0 \leq x < 1\}$ とする。$A \in \mathcal{B}(H)$ に対して、

$A_{x,y} = (Ae_y, e_x)$ $A \frown \langle A_{x,y} \rangle : [0, 1) \times [0, 1) \longrightarrow \mathbb{C}$ の関数を対応させる。

$$\mathfrak{A}_1 \equiv \{A ; A \in \mathcal{B}(H) ; A_{x,y} = \delta_{x,y} f(x), \ f \in \mathfrak{A}\}$$

$$\mathfrak{g}_1 \equiv \{ \quad \text{〃} \qquad f \in \mathfrak{g}\}$$

$$\mathfrak{A}_0 \equiv \{A \in \mathcal{B}(H) ; \quad A_{x,y} :$$

(1) $A_{x,y} = 0$ except for $y - x = j \cdot 2^{-k}$ for some $k \geq 1$ $\quad -2^k < j < 2^k$

(2) $k \geq 1 \quad 0 \leq i, j < 2^k$ に対しては、

$$f(x) = A_{2^{-k}(i+x),\, 2^{-k}(j+x)} \in \mathfrak{A} \}$$

$$\mathfrak{g}_0 = \{ A \in \mathcal{B}(H) : A_{x,y} : \begin{array}{l} (1) \quad \text{〃} \\ (2) \quad f(x) = A_{2^{-k}(i+x),\, 2^{-k}(j+x)} \in \mathfrak{g} \end{array} \}$$

とすれば、$\mathfrak{A}_0$ は C^*-algebra with unit $\mathfrak{g}_0$ は two-sided ideal of $\mathfrak{A}_0$

Theorem (Dyer [1]) $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{g}_1$ を maximal abelian $*$-subalgebra としてもつ AW^*-factor よって non W^*-である。

$\mathfrak{A}_1/\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{g} = Z$ に注意.

次にこれら $\mathbb{M}(Z, G_\theta)$, $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ の type 及びそれらの関係について考察してみよう。[6]

まず $Z = B^\infty[0,1)/\sim$ は non W^*, abelian AW^*-algebra であるが separable C^*-algebra の regular σ-completion となり従って、countable order dense subset をもち従って、Z は faithful state をもつ。φ とする. 実は $\mathbb{M}(Z, G)$ のつくり方から $\mathbb{M}(Z, G)$ onto $\tilde{Z}$ の faithful positive projection map Φ がある。今 $\psi = \varphi \circ \Phi$ とすると、ψ は $\mathbb{M}(Z, G)$ 上の faithful state 従って、Theorem of §1 により

Theorem ([6]) $\mathbb{M}(Z, G_\theta)$ は type III, monotone closed σ-finite AW^*-factor である。

同様にして、$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ onto $\mathfrak{A}_1/\mathfrak{g}_1$ の faithful positive projection map Φ' があり $\psi' = \varphi \circ \Phi'$ とすると $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は faithful state ψ' をもつ。又つくり方から $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は monotone σ-complete になるからやはり §1 の判定定理から

Theorem([6]) $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は monotone (σ-) closed type III σ-finite AW* factor である。

G_0を $[0,1)$ の dyadic rationals の translates によってつくられる $[0,1)$ の homeomorphism により induce された Z の $*$-automorphisms group とすると、 (Z, G_0) は (E)、(F) を満すが

Theorem ([6]) $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0 \cong \mathbb{M}(Z, G_0)$ である。従って、$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ は monotone closed である。

証明の概略. $A \in \mathfrak{A}_0$ $A + \mathfrak{g}_0 \in \mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$. $A \sim \langle A_{x,y} \rangle$ ならば、$A_{x,y} = 0$ except when $y - x = j \cdot 2^{-k}$ for some $k \geq 1$, $-2^k < j < 2^k$, $k \geq 1$ $0 \leq i, j < 2^k$: $x \longrightarrow f(x) = A_{2^{-k}(i+x),\, 2^{-k}(j+x)}$ $(0 \leq x < 1)$ $\in B^\infty[0,1) = \mathfrak{A}$ 。従って、$g \in G_0$ に対して、$A_{\sigma_g(x), x}$ は $[0,1)$ 上の bounded Baire function になる。ϕ を $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}/\mathfrak{g}$ の canonical map とすれば、

$$a_{g,e} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x \longrightarrow A_{\sigma_g(x), x}) \quad \forall g \in G_0$$

として、$a_{g,e}$ は $A \in A + \mathfrak{g}_0$ の撰び方によらない。

$a_{g,h} = (a_{g-h,e})^h$ $\forall g, h \in G_0$ として、$(a_{g,h})$ は $\mathfrak{M}$ 上の bounded module endomorphism $\psi(A + \mathfrak{g}_0)$ を define する。これは、

$$\sum_{g \in G_0} |A_{\sigma_g(x), x}|^2 = \sum_{g \in G_0} |(Ae_x, e_{\sigma_g(x)})|^2 \leq \sum_{0 \leq y < 1} |(Ae_x, e_y)|^2 \leq \|Ae_x\|^2 \leq \|A\|^2$$

に注意して、$\forall \xi = (x_g) \in \mathfrak{M}$ に対して、

$\displaystyle\sum_{h \in G_0} \Big| \sum_{g \in G_0} x_g a_{g,h} \Big|^2 \leq \|A\|^2 \|\xi\|^2$ が成立することによる。

i.e. $A+\mathfrak{g}_0 \longrightarrow \psi(A+\mathfrak{g}_0)$ は $\psi(A+\mathfrak{g}_0)_{g,h} = a_{g,h}$ より

$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0$ into $\mathbb{M}(Z, G_0)$ の $*$-isomorphism である。onto を示そう。$A \in \mathbb{M}(Z, G_0)$ with $A \sim \langle a_{g,h} \rangle$ とすると $\exists I$: a Baire set contained in a meager set in $[0,1)$: $\forall g,h$ $\exists$ $a_{g,h} \in B^\infty[0,1)$:

$$\Big| \sum_{g,h\in G_0}' a_{g,h}(x)\xi_h \bar{\eta}_g \Big| \leq \|A\| \Big(\sum_{h\in G_0}' |\xi_h|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{g\in G_0} |\eta_g|^2 \Big)^{1/2}$$

$\forall \{\xi_h\}, \{\eta_g\} \in \ell^2(G_0)$ $\quad \forall x \in [0,1) \setminus I$

$a_{g,h}'(x)$ を
$$a_{g,h}'(x) = a_{g,h}(x) \quad x \in [0,1) \setminus I$$
$$= 0 \quad x \in I$$

とすると、$\Big| \sum_{g,h\in G_0}' a_{g,h}'(x)\xi_h \bar{\eta}_g \Big| \leq \|A\| \Big(\sum_{h\in G_0}' |\xi_h|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{g\in G_0}' |\eta_g|^2 \Big)^{1/2}$ $\forall x$ $\forall \{\xi_h\}, \{\eta_g\} \in \ell^2(G_0)$。

$\langle A_{x,y} \rangle$ を $A_{x,y} = 0$ except when $x - y = j \cdot 2^{-k}$ for some $k \geq 1$, $-2^k < j < 2^k$, $A_{\sigma_g(x), x} \equiv a_{g,e}'(x)$ $\quad 0 \leq x < 1$ $\quad g \in G_0$

とすると、$x \longrightarrow A_{2^{-k}(i+x),\, 2^{-k}(j+x)}$ は $[0,1)$ 上の bounded Baire function. 且つ $\Big| \sum_{\substack{0\leq x<1 \\ 0\leq y<1}}' A_{x,y}\xi_x \bar{\eta}_y \Big| \leq \|A\| \|\xi\| \|\eta\|$ $\quad \forall$ $\xi = (\xi_x), \eta = (\eta_x) \in$

故にこれは $\mathfrak{A}_0$ の元 B を決定し、$(Be_y, e_x) = A_{x,y}$ $\forall x, y$.

$\therefore$ $\psi(B+\mathfrak{g}_0) = A$ は容易 $\therefore$ $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0 \cong \mathbb{M}(Z, G_0)$ である。//

§4. 注意.1. 実は、今までの $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{g}_0 (\cong \mathbb{M}(Z, G_0))$, $\mathbb{M}(Z, G_0)$, $\mathcal{A}$ は σ-finite だが "very big" である。i.e. 如何る non-trivial な separable な表現をもたない。実際 もしそのような

表現 $(\pi, \mathfrak{H})$ をもてば、上の III 型 σ-finite AW*-factor は皆 Simple であるから、π は faithful、又 $\mathfrak{H}$ が separable より π は projections と completely additive i.e. 上の example は c.a. states を充分沢山もつことになり Pedersen [ ] によれば W*-algebra となる。これは矛盾である。

2. 我々は $\mathbb{M}(Z, G_0)$, $M(Z, G_0)$, $\hat{A}$ (simple C*-algebra A) を得たがこれらの関係はどのようになるか？が次の問題である。又前にもちょっとふれたが identity をもたない C*-algebra の regular σ-completion とか、その structure theory 等いろいろ問題があるがこれは次の機会にゆずりたい。[7]

以上.

参考文献

[1] J. Dyer, Concerning AW*-algebras, To appear in J. Functional Anal..

[2] R. V. Kadison and G. K. Pedersen, Equivalence in operator algebras, Math. Scand., (1970), 205-222.

[3] I. Kaplansky, modules over operator algebras, Amer. J. Math., 75 (1953), 839-858.

[4] G. K. Pedersen, Operator algebras with weakly closed abelian subalgebras, Bull. London. Math. Soc., 4 (1972), 171-175.

[5] K. Saitô, A non commutative theory of integration for a semi-finite AW*-algebra and a problem of Feldman, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 420-461.

[6] ______, AW*-algebras with monotone convergence property and examples by Takenouchi and Dyer, To appear in Tôhoku Math. J.,

[7] ______, On a structure theory of regular σ-completion of C*-algebras (仮題) 準備中.

[8] O. Takenouchi, Preprint, 1970.

[9] J. D. Maitland Wright, On minimal σ-completions of C*-algebras, Bull. London Math. Soc., 6 (1974), 168-174.

[10] ______, Regular σ-completions of C*-algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299-309.

[11] ______, On AW*-algebras of finite type, J. London Math. Soc., 12 (1976), 431-439.

[12] ______, Wild AW*-factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976).

[13] ______, On semi-finite AW*-algebras, Math. Proc. Camb. phil. Soc. (1975), 79 443-445.